# El Grupo de un Nudo

por

Olga Patricia Salazar Díaz

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Matemática

Directora: Margarita María Toro Villegas

Universidad Nacional
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

1996

EL GRUPO DE UN NUDO

Olga Patricia Salazar Díaz

APROBADO:

Director

Debora María Tejada

Jurado

Juan Diego Vélez

Jurado

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS, contrato No. 086-95, código 1118-05-112-94.

# Resumen

En este trabajo se estudia el grupo de un nudo, es decir, el grupo fundamental del complemento de un nudo en $S^3$, herramienta que se ha utilizado frecuentemente para dar solución a los problemas que plantea la teoría de Nudos. En el trabajo presentamos inicialmente, los conceptos fundamentales de la teoría de Nudos y el concepto de presentación de grupos por medio de generadores y relaciones. Se estudia la presentación de Wirtinger para el grupo de un nudo y se hacen algunas aplicaciones.

# Contenido

# Agradecimientos

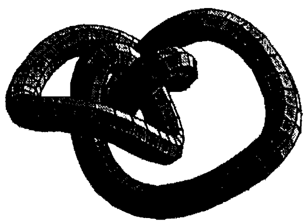
Expreso mis sinceros agradecimientos:

A Margarita María Toro Villegas, profesora de la Universidad Nacional por su especial colaboración como directora de esta monografía.

A los profesores Débora María Tejada y Juan Diego Vélez por sus correcciones y observaciones como jurados del trabajo.

# Introducción

Imaginemos que formamos un nudo con un lazo y después pegamos los extremos del lazo para que el nudo no pueda deshacerse; ésta es una idea intuitiva de lo que es un nudo en Matemáticas.



La teoría de nudos ha sido desarrollada básicamente tratando de responder problemas como: ¿está realmente anudado un nudo? Si se hace otro nudo en la misma cuerda con la que ya se ha realizado uno, ¿se puede desanudar el primero? Y el problema fundamental: ¿son equivalentes dos nudos dados? Es decir, dados dos nudos aparentemente distintos, ¿es posible transformar uno en el otro sin cortar la cuerda?

Una de las herramientas que se utiliza desde finales del siglo pasado, introducida por Poincaré para resolver problemas en Topología, es el grupo fundamental del complemento del nudo en $S^3$, el grupo del nudo, el cual aunque no logra clasificar totalmente los nudos, nos da respuesta para los dos primeros interrogantes enunciados anteriormente, y en cuanto al problema fundamental permite determinar la no equivalencia de nudos para muchos casos.

El objetivo de este trabajo es entender el grupo de un nudo y su relación con el problema de la clasificación. Para ello se desarrollarán los elementos básicos, tanto de la teoría de nudos como de la teoría de grupos.

El trabajo está escrito en tres capítulos. El primero de ellos contiene algunos elementos y definiciones de la teoría de nudos, lo que es el grupo fundamental de $S^3 - N$ para un cierto nudo $N$ y una breve reseña histórica acerca del desarrollo de la teoría.

Dado que el grupo de un nudo se define en términos de generadores y relaciones, y que con base en tal definición se estudian algunas propiedades del grupo, es fundamental entender los conceptos de presentación de un grupo por generadores y relaciones. En el segundo capítulo se hace una síntesis sobre lo que significa presentar un grupo de esta manera, la forma de lograr tal presentación y cómo ésto conlleva siempre a tres problemas, a saber: el problema de la palabra, el problema de la conjugación y el problema del isomorfismo.

En el tercer capítulo, se describe una presentación del grupo de un nudo, dada por Wirtinger, y se calcula el grupo para varios nudos. Propiedades del grupo de un nudo y del nudo mismo tales como el grupo del nudo trivial, el grupo de la suma conexa, el defecto del grupo y el teorema de la no cancelación son también parte de este capítulo.

# Capítulo 1

# Conceptos básicos

## 1.1 Preliminares

Como se expresa en la introducción, en este capítulo damos a conocer conceptos y definiciones básicas sobre la teoría de nudos, indispensables para nuestro estudio.

Nuestro primer problema es el siguiente: A partir del modelo físico de un nudo como una cuerda anudada y atada en los extremos, ¿Cómo darle un significado preciso a este concepto en forma matemática? El segundo problema se deriva del hecho de que podemos manipular la cuerda, sin romperla, y transformar un nudo en otro de apariencia totalmente distinta. Por lo tanto es necesario definir en forma precisa el concepto de "igualdad" de nudos. La definición que usaremos es la siguiente:

**Definición 1** *i) Diremos que un conjunto $N$ de $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ es un* **nudo** *si existe un homeomorfismo de $S^1$ en $N$.*

*ii) Dados dos nudos $N$ y $K$ se dice que son* **del mismo tipo** *si existe un homeomorfismo $f : S^3 \to S^3$ tal que $f(N) = K$.*

Con esta relación se determinan clases de equivalencia, a las que llamaremos **tipos de nudos**. Así, para cada clase se elige un representante sobre el cual se estudian las características y propiedades de dicha clase.

Nótese que la definición *ii)* no dice sólo que los nudos $N$ y $K$ sean homeomorfos (hecho que siempre es cierto puesto que ambos son homeomorfos a $S^1$), sino que exige que $f$ sea un homeomorfismo definido en todo $S^3$.

Sin pérdida de generalidad, escogiendo a $f$ de manera conveniente, podemos garantizar que $N$ sea un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Además, el representante de la clase de $N$ se puede elegir de tal manera que la proyección en el plano $z = 0$ es una curva cerrada cuyos puntos múltiples son sólo puntos dobles. Bajo esta proyección la imagen de $N$ se llama *proyección regular* o *diagrama* del nudo. Al dibujar esta proyección tenemos el cuidado de dejar algunos espacios en blanco alrededor de los puntos dobles, que llamaremos *cruces*, indicando así cuál de los puntos va por encima y así poder recobrar el nudo a partir de la proyección. Por ejemplo el siguiente diagrama (**Fig.**1-1), es la proyección del nudo dibujado en la introducción.

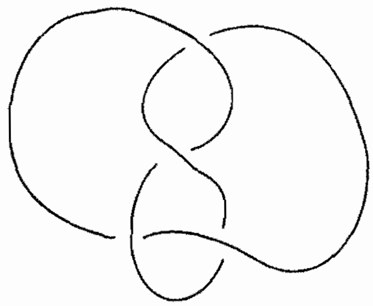
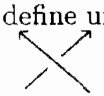


Figura 1-1

Todo diagrama en el plano $z = 0$, como el descrito anteriormente, representa un nudo en $\mathbb{R}^3$.

Todo nudo $N$ puede dotarse de una orientación en $S^3$. Un ejemplo de un diagrama de un nudo orientado puede verse en la **Figura** 1-2.

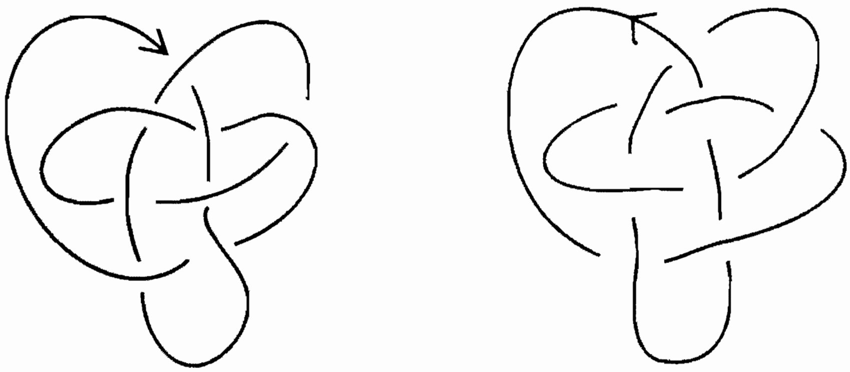
Figura 1-2

Con base en la proyección de un nudo y para cualquier cruce se define un *signo de cruce* el cual es positivo si tiene la forma  y negativo si es de la forma  .

En nuestra definición de tipo de nudos no se tuvo en cuenta la orientación en $S^3$ ni la orientación del nudo. El tratamiento riguroso de orientación en $S^3$ se puede hacer mediante la teoría de homología, sin embargo, podemos apoyarnos en la siguiente idea intuitiva: dado un homeomorfismo $h : S^3 \to S^3$ decimos que $h$ "preserva orientación" si la imagen de cada tripleta de vectores orientada según el sentido de la mano derecha, es de nuevo una tripleta orientada en este sentido, y que $h$ "reversa orientación" si la imagen de cada tripleta orientada según el sentido de la mano derecha es una tripleta orientada en el sentido de la mano izquierda. Se sabe que cada homeomorfismo de $S^3$ en $S^3$ es de uno de estos dos tipos: preserva orientación o reversa orientación. Con el concepto de orientación tenemos la siguiente definición:

**Definición 2** *Dos nudos orientados* $N$ *y* $K$ *son* **equivalentes** *si existe un homeomorfismo* $f : S^3 \to S^3$, *que preserva orientación, tal que* $f(N) = K$. *Se denota* $N \cong K$.

La noción de equivalencia de nudos es más fuerte que la de tipo de nudo, por ejemplo, es posible demostrar que el nudo $K = 8_{17}$ (el décimo séptimo nudo de ocho cruces descubierto) y el nudo $L$ (ver Fig. 1-3) son del mismo tipo pero no son equivalentes.

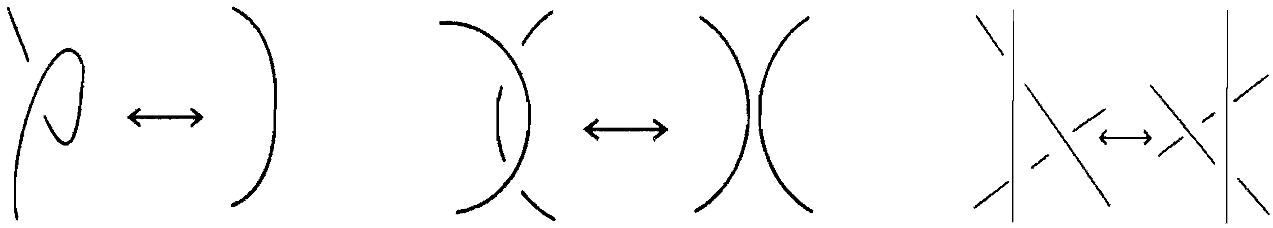


$K = 8_{17}$ $\qquad$ $L$

Figura 1-3

Siempre que hablemos de equivalencia será teniendo en cuenta la orientación.

Dado que gran parte de nuestro estudio se hace con base en los diagramas de los nudos y no sobre los nudos mismos, es necesario buscar una definición de equivalencia de diagramas que corresponda a la equivalencia de nudos. Para definir la equivalencia de diagramas introduzcamos entonces los movimientos de Reidemeister. Estos son de tres tipos los cuales ilustramos a continuación:



Tipo I Tipo II Tipo III

Figura 1-4

La aplicación de estos movimientos se hace de manera local dejando el resto del nudo igual.

Estos movimientos nos permiten hacer la siguiente definición:

**Definición 3** *Dos diagramas son equivalentes si es posible transformar el uno en el otro mediante un número finito de movimientos de Reidemeister.*

Estos movimientos de Reidemeister, los cuales permiten mostrar la equivalencia de dos diagramas, son realizados por homeomorfismos que preservan orientación. Así, diagramas equivalentes representan nudos equivalentes. Es posible ver que el recíproco también es cierto (ver [1, prop. 1.14]), y por lo tanto tenemos que:

**Teorema 4** *Dos nudos son equivalentes si y sólo si sus diagramas son equivalentes.*

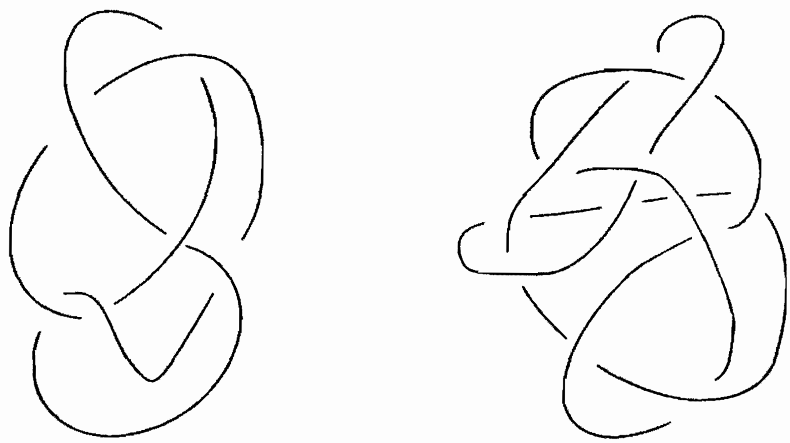
## 1.2 Ejemplos de Nudos

En esta sección presentamos algunos ejemplos de nudos y definimos algunos conceptos que juegan un papel importante en el estudio de la teoría.

Un nudo equivalente a uno cuya proyección no tiene cruces es llamado *nudo trivial* o *suelto*.

A un nudo que sea equivalente a uno cuya proyección posea sólo un número finito de cruces lo llamamos nudo *manso*. Cuando todas las proyecciones de un nudo tienen infinitos cruces se le llama nudo *salvaje*. En este trabajo sólo consideramos nudos mansos.

Si al recorrer la proyección de un nudo, cruces por encima y cruces por debajo se alternan, entonces decimos que la proyección es alternante y que el nudo es *alternante* (Fig. 1-5).

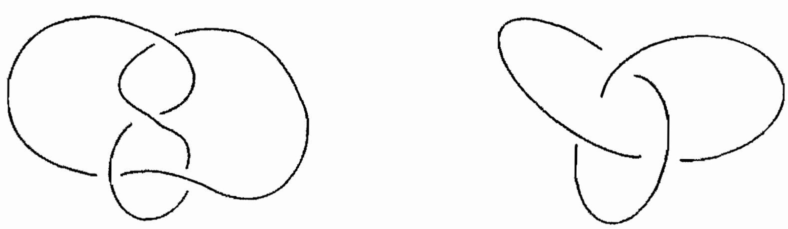


a.) Nudo alternante. b.) Nudo no alternante.

Figura 1-5

A partir de un nudo $N$ podemos obtener otros dos nudos: La *imagen espejo* de $N$, que se denota $\bar{N}$, y es el nudo original con los cruces intercambiados. Si reversamos la orientación del nudo $N$, obtenemos un nudo que se llama el *inverso* de $N$ y se denota $N'$. Si $N$ y $\bar{N}$ son equivalentes decimos que $N$ es *anfiqueiral.* En el caso en que $N$ y $N'$ sean equivalentes, $N$ se llama *invertible.* En 1914 Dehn probó que el trébol (Fig. 1-6 b)) no es anfiqueiral, pero la existencia de nudos no invertibles fue una pregunta abierta hasta 1969, año en que fue respondida de manera afirmativa por Trotter (ver [10]).

Por ejemplo, el nudo de la Figura 1-6 a) es anfiqueiral y el de la Figura 1-6 b) es invertible.



a) Nudo **8** b) Nudo **Trébol**

Figura 1-6

Dados dos nudos es posible definir una operación entre ellos así:

**Definición 5** *Decimos que $N$ es el producto o la suma conexa de los nudos $N_1$ y $N_2$, lo cual denotaremos como $N = N_1 \# N_2$, si es posible cortar a $N$ por un plano en dos puntos $P$ y $Q$ de tal manera que al unir los extremos sueltos a cada lado del plano se obtienen $N_1$ y $N_2$. Si un nudo es el producto de dos nudos no triviales es llamado* **compuesto**. *Un nudo no trivial que no es compuesto es llamado nudo* **primo**.

Por ejemplo el nudo de la Figura 1-7 es la suma conexa de los nudos de la Figura 1-6.

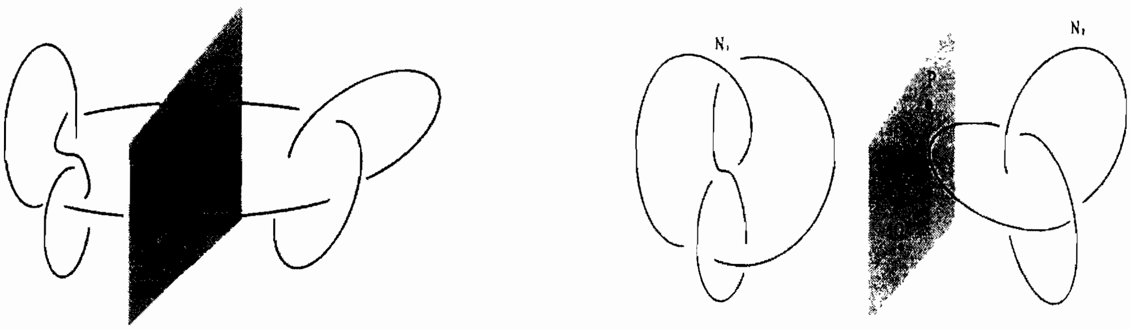
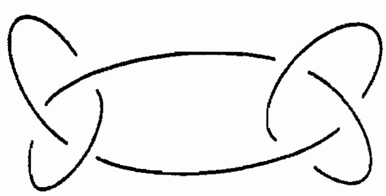


Figura 1-7

Se tiene el importante resultado de que todo nudo compuesto puede expresarse de manera única como la suma conexa de un número finito de nudos primos (ver [1, Cap.7]).

Dos ejemplos importantes de nudos compuestos son los nudos $N \# N$ y $N \# \bar{N}$ donde $N$ es el trébol. A estos nudos los llamamos nudo *granny* (abuelita) y nudo *reef* (o cuadrado) respectivamente (Fig. 1-8).



**Granny**

**Reef**

Figura 1-8

## 1.3 El grupo de un nudo

El problema fundamental de la teoría de nudos es el siguiente:

Dados dos nudos $N$ y $L$, *¿Existe un homeomorfismo* $f : S^3 \to S^3$, *que preserve orientación, y tal que* $f(N) = L$? Sabemos que si $f$ existe entonces $N$ y $L$ son equivalentes. Al hacernos esta pregunta lo que queremos es conocer la descripción de las clases de nudos equivalentes. Este problema es difícil de resolver directamente, lo que hace necesario recurrir al concepto de invariante.

**Definición 6** *Una correspondencia* $\chi$ *que asocia a todo nudo* $N$ *una expresión matemática,* $\chi(N)$, *es llamada* **invariante** *si dados* $N \cong K$ *se tiene que* $\chi(N) = \chi(K)$.

Son ejemplos de invariantes el mínimo número de cruces (es decir, la cantidad de cruces que posee una proyección con el mínimo número de puntos dobles posible), el grupo del nudo y algunos polinomios tales como el de Alexander, el de Conway y el de Jones (ver [5]). En muchos casos no son suficientes los dos primeros invariantes para diferenciar nudos no equivalentes, por ejemplo para los nudos granny y reef se tiene que el mínimo número de cruces es seis para ambos, y como veremos más adelante, los grupos de estos nudos son isomorfos, pero los nudos no son equivalentes.

Si $N$ y $L$ son equivalentes sus espacios complementarios $S^3 - N$ y $S^3 - L$ son homeomorfos, así las propiedades invariantes de $S^3 - N$ son todas invariantes para la clase de $N$. Es muy natural entonces considerar el grupo de homotopía del complemento de $N$ en $S^3$. Este es uno de los invariantes algebraicos que se ha considerado para resolver el problema general de la teoría de nudos. Fue ideado a finales del siglo pasado y se basa en la descripción del espacio que rodea un nudo inmerso en $S^3$ y las trayectorias o caminos que lo surcan.

Veamos cómo se construye este grupo.

Fijemos un punto base $x_0$ arbitrario en el complemento de un nudo y tracemos los caminos cerrados basados en $x_0$ que cruzan el espacio. Recordemos que un camino es una función continua definida de $I = [0, 1]$ en un espacio topológico $X$. Si $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$, son caminos, diremos que son equivalentes si existe una homotopía $F$ entre $\alpha$ y $\beta$, relativa a los extremos, es decir, existe una función continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \beta(t)$, para todo $t \in I$ y $F(0,s) = F(1,s) = x_0$ para todo $s \in I$. Si $\alpha$ y $\beta$ son equivalentes lo denotamos como $\alpha \simeq \beta$.

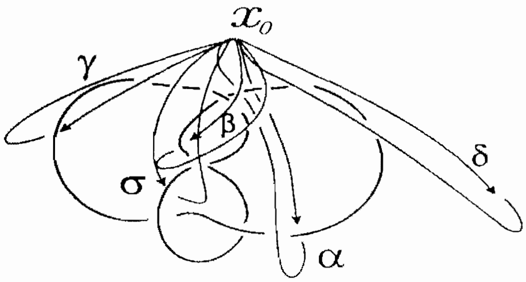



Figura 1-9

Esta equivalencia convierte el conjunto de caminos cerrados basados en $x_0$ que surcan el complemento de un nudo en una colección de clases de caminos homotópicos. Por ejemplo, en la Figura 1-9, los caminos $\alpha$ y $\beta$ son equivalentes, mientras que $\beta$ y $\gamma$ no lo son.

Si a este conjunto lo dotamos de la operación $\bullet$ , composición de clases de caminos, es decir, dadas dos clases de caminos $[\alpha]$ y $[\beta]$ la operación $[\alpha] \bullet [\beta]$ consiste en partir de $x_0$, recorrer $\alpha$ y luego $\beta$, entonces se puede probar que:

$(i)$ La operación $[\alpha] \bullet [\beta]$ no depende del representante de la clase, es decir, si $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$ entonces $[\alpha] \bullet [\beta] \equiv [\alpha'] \bullet [\beta']$. Por lo tanto $\bullet$ está bien definida.

$(ii)$ La composición de dos clases de caminos basados en $x_0$ es otra clase de caminos basados en $x_0$, es decir, el conjunto es cerrado bajo la composición.

$(iii)$ Dadas 3 clases $[\alpha]$,$[\beta]$, $[\gamma]$ se cumple que $([\alpha] \bullet [\beta]) \bullet [\gamma] \equiv [\alpha] \bullet ([\beta] \bullet [\gamma])$. Esto es, la composición es asociativa.

$(iv)$ Dado $e : I \rightarrow X$ tal que $e(t) = x_0$, para todo $t \in I$, al operar el camino $e$ con cualquier otro obtenemos un camino equivalente a este último, es decir, la clase $[e]$ es el elemento neutro del conjunto.

$(v)$ Para toda clase $[\alpha]$ podemos definir en el conjunto una clase $[\alpha]^{-1} \equiv [\alpha^{-1}]$ , con $\alpha^{-1}$ un camino que hace el mismo recorrido de $\alpha$, en sentido contrario y es tal que $[\alpha] \bullet [\alpha]^{-1} \equiv [\alpha]^{-1} \bullet [\alpha] \equiv [e]$

Es posible ver que con estas propiedades, nuestro conjunto adquiere una estructura de grupo, (para pruebas detalladas ver [7]) llamado primer grupo de homotopía del complemento del nudo, o *grupo del nudo*, y se denota $\Pi_1(S^3 - N)$.

El grupo de un nudo es un invariante de gran potencia. Por ejemplo, no existen dos nudos primos distintos con grupos isomorfos pero sí con el mismo número mínimo de cruces. Si los nudos no son primos no puede hacerse tal afirmación pues el nudo granny y el reef tienen grupos isomorfos (lo veremos en el Capítulo 3), siendo nudos no equivalentes. Para probar la no equivalencia, es necesario contar con otros invariantes como el polinomio de Jones (que no se estudia en este trabajo) y que es distinto para estos dos nudos, probando así que no son equivalentes. El grupo no distingue entre el nudo y su imagen espejo o su inverso. Esta dificultad se disminuye al considerar algunos elementos adicionales.

Una característica importante es la facilidad del cálculo del grupo de un nudo mediante presentaciones por generadores y relaciones. En el Capítulo 3 estudiaremos una de estas presentaciones, *la presentación de Wirtinger,* la cual es fácil de obtener a partir del diagrama del nudo.

## 1.4 Un poco de historia

Inicialmente fue Gauss (1833) quien mostró interés en el tema de los nudos e inventó una notación para proyecciones regulares. Listing (1847), alumno de Gauss, reveló buen conocimiento de la anfiqueiralidad del nudo 8 e intentó una notación para diagramas alternantes que fue corregida posteriormente por el físico escocés Peter Guthrie Tait (1898). Este autor realizó una tabulación de nudos alternantes hasta de 10 cruces, que exceptuando la repetición de uno de ellos, era totalmente correcta. Además de esta lista dedicó también atención a los nudos anfiqueirales.

Además de ellos trabajó también el Reverendo Thomas Kirkman (1885), quien dio su definición muy particular de nudo, también creó un método para llevar diagramas a una forma irreducible lo que le permitió construir diagramas hasta de 11 cruces que después les fueron de gran ayuda a Tait y Little para tabular nudos. El profesor C. N. Little (1889) compitió con Kirkman por construir grandes tablas de nudos no alternantes. Logró una lista de 43 nudos de 10 cruces en la cual sólo había una duplicación, que sólo fue descubierta por K. A. Perko en

1974. Para ayudarse en sus cálculos, Little inventó el *twist*, o valor absoluto de la suma de los signos de cruce en cualquier diagrama con número minimal de cruces, que por algún tiempo se consideró como invariante, hasta que el trabajo de Perko mostró que no lo es (ver [9]).

La presentación del grupo de un nudo por generadores y relaciones fue desarrollada inicialmente por W. Dick (1882) siguiendo algunas sugerencias de A. Cayley (1878). Sin embargo la mejor presentación conocida fue la dada por W. Wirtinger (1905). También M. Dehn (1910) dio una presentación para el grupo del nudo y con algunos elementos adicionales probó que los dos tréboles no son equivalentes.

Hasta inicios de este siglo los métodos empleados en el estudio de nudos fueron en general de carácter combinatorio y relativamente empíricos. Los trabajos de M. Dehn, J. Alexander (1925), K. Reidemeister (1928) y H. Seifert (1934) fueron precursores en considerar la teoría de nudos como un subcampo de la Topología.

Autores como G. Torres y R. Fox (1954) quienes han estudiado presentaciones duales para el grupo de un nudo; Papakiriakopoulos (1955) con su estudio del complemento de un nudo; L.P. Neuwirth (1965) con su dedicación a estudiar problemas del grupo de un nudo han permitido probar nuevas propiedades del grupo de un nudo.

Whitten (1987) probó que nudos primos con grupos isomorfos tienen complementos homeomorfos. C. Gordon y J. Luecke (1988) enunciaron que dos nudos con complementos homeomorfos son equivalentes, lo cual con lo ya probado por Whitten prueba el interesante resultado de que dos nudos primos con grupos isomorfos son equivalentes.

Estudios recientes sobre el grupo de un nudo han sido realizados con base en los trabajos de R. Riley y W. Thurston quienes han descubierto la posibilidad de dotar al complemento de muchos nudos con una estructura hiperbólica, creando con ello un gran interés en el estudio de esta teoría.

# Capítulo 2

# Presentación de grupos

En muchas aplicaciones de la teoría de grupos, especialmente en este trabajo, en el cual se hace un análisis del grupo fundamental del complemento de un nudo en $S^3$, los grupos son descritos por una técnica que consiste en expresar a $G$ como un cociente de la forma $F/R$, donde $F$ es un grupo "libre" y $R$ es un conjunto que define "relaciones" entre los elementos de $F$. El estudio de esta técnica, que se conoce como *presentación de un grupo por generadores y relaciones*, es el tema de este capítulo y la usaremos para calcular el grupo de un nudo en el Capítulo 3. El estudio de la presentación de un grupo está relacionado con problemas tales como el problema de la palabra, el problema de la conjugación y el problema del isomorfismo, los cuales serán enunciados al final del capítulo.

Puesto que lo que queremos hacer es expresar a $G$ como el cociente de un grupo libre, empezaremos definiendo este concepto.

**Definición 7** *Un grupo $F$ es* **libre** *en un subconjunto $X$ si para todo grupo $G$ y toda función $f : X \to G$ hay un único homomorfismo de grupos $\tilde{f} : F \to G$ que extiende a $f$, es decir, tal que para todo $x \in X$, $\tilde{f}(x) = f(x)$. El conjunto $X$ es llamado una* **base** *de $F$.*

En este trabajo $X$ es numerable aunque los resultados que se enuncian, se conservan en el caso en que no lo sea.

Consideremos un conjunto de símbolos $A = \left\{a_1, a_2, ..., a_1^{-1}, a_2^{-1}, ...\right\}$ al cual llamamos *alfabeto.* Decimos que $W$ es una palabra en $A$, representada como $W(a_1, a_2, ...)$, si $W = x_1 x_2 ... x_n$, es decir, una concatenación de símbolos $x_i$, donde cada $x_i \in A$. Al entero $n$ lo llamamos *longitud* de la palabra $W$.

Con respecto a las palabras introduzcamos las siguientes notaciones:

$(i)$ $x_i^n$ denota la palabra $\underbrace{x_i ... x_i}_{n \text{ veces}}$.

$(ii)$ $x_i^{-n}$ denota la palabra $\underbrace{x_i^{-1} ... x_i^{-1}}_{n \text{ veces}}$.

(*iii*) La palabra de longitud cero se denomina la *palabra vacía* y la identificamos con $e$.

(*iv*) Si $W = x_1 ... x_n$ entonces definimos $W^{-1} = x_n^{-1} ... x_1^{-1}$.

(*v*) La yuxtaposición de dos palabras $W = x_1 ... x_n$ y $U = y_1 ... y_m$ definida como $x_1 ... x_n y_1 ... y_m$ se denotará por $WU$.

Diremos además que una palabra $W$ en $X$ es reducida si satisface las siguientes condiciones:

1. $x_i, x_i^{-1}$ no aparecen como símbolos consecutivos en $W$.
2. Si $x_m = 1$ para algún $m$ entonces $x_k = 1$ para todo $k > m$

El siguiente teorema garantiza la existencia de grupos libres.

**Teorema 8** *Si* $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ *entonces existe un grupo* $F$ *que es libre en* $X$.

**Prueba.** Construiremos a $F$ como un subgrupo del grupo de permutaciones en $P$, donde $P$ es el conjunto de todas las palabras reducidas en $X$. Cada elemento $x_i \in X$ se identificará con la función $|x_i|$. Las funciones $|x_i|$ y su inversa $\left|x_i^{-1}\right|$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} |x^\epsilon| : P & \longrightarrow & P & \\ x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \mapsto & |x^\epsilon| \left(x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n}\right) = \begin{cases} x^\epsilon x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x^\epsilon \neq x_1^{-\epsilon_1} \\ x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x^\epsilon = x_1^{-\epsilon_1} \end{cases} & \epsilon = \pm 1. \end{array}$$

Se tiene que, para cualquier palabra $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n}$

$$|x| \left(x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n}\right) = \begin{cases} x x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x \neq x_1^{-\epsilon_1} \\ x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x = x_1^{-\epsilon_1} \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \left|x^{-1}\right| |x| \left(x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n}\right) &= \left|x^{-1}\right| \begin{cases} x x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x \neq x_1^{-\epsilon_1} \\ x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x = x_1^{-\epsilon_1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x \neq x_1^{-\epsilon_1} \\ x^{-1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} & \text{si} \quad x = x_1^{-\epsilon_1} \end{cases} \\ &= x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} \end{aligned}$$

es decir, $|x^{-1}|\, |x|$ es la identidad en $P$. De manera similar se prueba que $|x|\, |x^{-1}|$ es también identidad en $P$, entonces cada $|x|$ es una permutación de $P$. Sea $S_P$ el grupo de todas las permutaciones de $P$, y sea $F_0$ el subgrupo de $S_P$ generado por $X_0 = \{|x| : x \in X\}$. Cualquier elemento de $F_0$ se puede factorizar como $|x_1^{\epsilon_1}| \ldots |x_n^{\epsilon_n}|$ con $\epsilon_i = \pm 1$ y $|x^\epsilon| \, |x^{-\epsilon}|$ nunca están adyacentes. Esta factorización es única.

Supongamos ahora que $G$ es un grupo y $f : X_0 \to G$ es una función. Definamos $\tilde{f} : F_0 \to G$ por $\tilde{f}\left(|x_1^{\epsilon_1}| \ldots |x_n^{\epsilon_n}|\right) = f\left(|x_1|\right)^{\epsilon_1} \ldots f\left(|x_n|\right)^{\epsilon_n}$.

$\tilde{f}$ está bien definido puesto que la factorización en $F_0$ es única. Ahora si $U$ y $V$ están en $F_0$, entonces $U = |x_1^{\epsilon_1}| \ldots |x_n^{\epsilon_n}|$ y $V = |y_1^{\eta_1}| \ldots |y_m^{\eta_m}|$ y así $UV = |x_1^{\epsilon_1}| \ldots |x_s^{\epsilon_s}| \, |y_1^{\eta_t}| \ldots |y_m^{\eta_m}|$ $s \leq n$, $1 \leq t$.

Puede verse que $\tilde{f}(UV) = \tilde{f}(U)\, \tilde{f}(V)$. Así $\tilde{f}$ es un homomorfismo y extiende a $f$. Luego $F_0$ es libre en $X$.□

El siguiente corolario será de gran importancia en nuestro estudio.

**Corolario 9** *Todo grupo $G$ es isomorfo al cociente de un grupo libre.*

**Prueba.** Consideremos a $G$ como un conjunto, y sea $F$ un grupo libre en $G$. Si $f : G \to G$ es la identidad entonces hay un homomorfismo $\tilde{f} : F \to G$ que extiende a $f$. Además, como $f$ es sobre, así es $\tilde{f}$. Por el teorema del cociente, $\tilde{f}$ induce un isomorfismo $\bar{f} : F/Ker\left(\tilde{f}\right) \xrightarrow{\sim} G$.□

Con base en este corolario, si $X = \{a_i : i \in I\}$ y $\{r_j : j \in J\}$ es un conjunto de palabras en $X$, podemos hacer la siguiente definición:

**Definición 10** *Un grupo $G$ es definido por generadores $X = \{a_i : i \in I\}$ y relaciones $\Delta = \{r_j = e : j \in J\}$ si $G \cong F/R$, donde $F$ es el grupo libre en $X$ y $R$ es el subgrupo normal de $F$ generado por $\{r_j : j \in J\}$. El par $(X, \Delta)$ es llamado una presentación de $G$.*

En caso que tanto el conjunto de generadores como de relaciones sean finitos decimos que la presentación es *finita*.

Una consecuencia importante de poder expresar a $G$ como el cociente de $F/R$, y que usamos en el Capítulo 3, está dada por el siguiente lema:

**Lema 11** *Sean $G$ un grupo con presentación $G = (X, \Delta)$ y $H$ un grupo cualquiera. Si $\Phi : F \to H$ es un homomorfismo del grupo libre $F$ en $X$, en el grupo $H$, tal que $R \subset Ker\Phi$, entonces $\Phi$ se puede extender a un homomorfismo $\Psi : G \to H$.*

**Prueba.** Como $R \subset Ker\Phi$, el teorema fundamental de cocientes nos permite extender a $\Phi$ a un homomorfismo $\Psi : F/R \longrightarrow H$, definido como $\Psi(\bar{z}) = \Phi(z)$, para todo $z \in F$.$\square$

Algunos ejemplos de presentaciones son:

$$G_1 = \left\langle x_1, x_2 / x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 \right\rangle.$$
$$G_2 = \langle x_1, x_2 / x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 \rangle$$
$$G_3 = \langle a, b / a^9 = b^2 \rangle.$$
$$G_4 = \left\langle x_1, x_2 / x_1 x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} = x_2 x_1 x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \right\rangle.$$

Las presentaciones $G_2$ y $G_3$, aunque parecen tan diferentes, son realmente presentaciones de un mismo grupo, pues al hacer $a = x_1 x_2$ y $b = a^4 x_2$ vemos que $G_2$ y $G_3$ son isomorfos.

El tener una presentación para un grupo dado permite saber cuál es el grupo, pero surgen preguntas acerca de cómo es el grupo. Por ejemplo, sea $G$ un grupo finitamente generado: cómo saber si dadas las relaciones del grupo, las palabras $aba^{-1}b^{-1}, aca^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}c^{-1}, \ldots$ pueden ser reducidas a la palabra vacía?, es decir, es $G$ abeliano? Es esta una de las razones para considerar importante el problema de la existencia de un proceso que permita decidir en un número finito de pasos si dada una palabra, es posible transformarla con las relaciones del grupo en la palabra vacía. Este problema y otros dos fueron enunciados en 1911 por Max Dehn, para grupos $G$ con una presentación determinada. Estos problemas son:

- *Problema de la palabra:* Dada una palabra $W$ en $G$, decidir en un número finito de pasos si se puede reducir o no a la identidad.

- *Problema de la conjugación:* Dadas $W_1$ y $W_2$ en $G$, decidir si $W^{-1}W_1W$ puede ser reducida en $W_2$ para alguna $W$ en $G$.

- *Problema del isomorfismo:* Dado un grupo $G'$ definido por una presentación diferente a la de $G$ decidir en un número finito de pasos si $G$ es isomorfo a $G'$.

Se ha encontrado solución para el problema de la palabra en grupos con presentaciones finitamente generadas en las cuales aparecen las relaciones $ab = ba$ para todos los generadores $a, b$, o sea grupos abelianos; para grupos libres o para grupos cuya presentación tiene a lo más una relación (ver [6, Cap. 6]). En estos grupos también pueden ser resueltos el problema de la conjugación y el problema del isomorfismo.

El problema de la palabra ha sido dividido naturalmente en tres épocas: La primera de ellas (1880-1930), en la cual la teoría combinatorial de grupos interactúa con la topología y da origen al problema de la palabra. En la segunda época (1930-1957), tiene un gran desarrollo la teoría de la computabilidad, pues aparece el concepto de las máquinas de Turing, concepto que permite transformar el problema algebraico en un problema de computabilidad y gracias a esta transformación Novikov e, independientemente, Boone mostraron la existencia de un grupo finitamente presentado para el cual se sabe que el problema de la palabra no puede ser resuelto, es decir, no existe un conjunto de instrucciones que permitan decidir en un número finito de pasos si una palabra dada es o no la identidad (ver [8]). La tercera época (1957-1980), caracterizada por la interacción de la teoría de grupos con la lógica trae una simplificación de la prueba de la no solubilidad.

Para el grupo de un nudo $N$ el problema de la palabra tiene una interpretación topológica muy importante: *decidir si un camino cerrado en $S^3 - N$ es o no homotópico al camino trivial.* Afortunadamente, se sabe que para este grupo el problema de la palabra está resuelto en forma afirmativa, es decir, existe un proceso que permite decidir si una palabra dada puede o no transformarse en la palabra vacía, aunque dicho proceso no se muestra en este trabajo. En 1914, Dehn resolvió el problema de la palabra para el grupo del trébol, pero la solución general sólo fue dada en 1968 cuando Waldhausen resolvió el problema para todos los grupos de nudos (ver [11]).

# Capítulo 3

# El grupo de un nudo

En este capítulo probamos que el grupo de un nudo $N$, $\Pi_1(S^3 - N)$, puede ser presentado en términos de generadores y relaciones, calculamos el grupo para algunos nudos y deducimos algunas propidedades de la estructura general de este grupo, tales como ser producto semidirecto de su conmutador y de $\mathbb{Z}$ y probamos que el defecto del grupo de un nudo es 1. Además, calculamos el grupo de una suma conexa de nudos a partir de los grupos de los nudos componentes. Enunciamos, sin demostración, la caracterización del nudo trivial y con base en ésta, probamos que en efecto existen nudos no triviales, y además el Teorema de la "no cancelación".

## 3.1 Presentación de Wirtinger para el grupo de un nudo

En esta sección vemos inicialmente, como ejemplo ilustrativo, cómo calcular el grupo del nudo trébol. Tracemos los caminos $x, y, z$ como se muestran en la Figura 3-1 a.). Un camino por cada uno de los segmentos en los que los cruces dividen al nudo. Intuitivamente, se tiene que cualquier otro camino puede definirse como una composición de $x, y, z$ y sus inversos.


Figura 3-1

Veamos qué relaciones se presentan entre estos caminos. Observemos en la Figura 3-1 b.) que si deslizamos el camino $y$ y lo pasamos por debajo del cruce (*), podemos expresar el camino $y$ como: $y = x^{-1}zx$. Si repetimos el proceso en cada cruce para los otros dos caminos, vamos a encontrar otras dos relaciones que son de la forma $z = y^{-1}xy$ y $x = z^{-1}yz$. De manera intuitiva tenemos que el grupo tiene tres generadores y tres relaciones, necesitamos mostrar de forma rigurosa que la presentación de este grupo es realmente $\langle x, y, z / x^{-1}zx = y, y^{-1}xy = z, z^{-1}yz = x \rangle$, es decir, no hay más generadores ni más relaciones en la presentación del grupo. Tenemos entonces que encontrar un método que permita, dado un diagrama de un nudo, identificar completamente sus generadores y sus relaciones; además de que el cálculo realizado pueda hacerse de manera simple. Para eso describamos ahora la presentación del grupo fundamental de un nudo debida a Wirtinger. Usamos el Teorema de Van Kampen, que enunciamos sin demostración (ver [2]).

**Teorema 12** *(Van Kampen) Sean $X$ un espacio topológico y $X_1, X_2$ subespacios abiertos de $X$ tales que $X = X_1 \cup X_2$. Supongamos que $X_1, X_2$ y $X_1 \cap X_2$ son no vacíos y conexos por caminos. Supongamos además que*

$$\Pi_1(X_1) = \langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_m \rangle$$
$$\Pi_1(X_2) = \langle y_1, ..., y_k / s_1, ..., s_l \rangle$$
$$\Pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle z_1, ..., z_r / t_1, ..., t_\ell \rangle .$$

*Entonces el grupo fundamental de $X$ tiene la presentación*

$$\Pi_1(X) = \langle x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k / r_1, ..., r_m, s_1, ..., s_l, i_{1*}(z_1) = i_{2*}(z_1), ..., i_{1*}(z_r) = i_{2*}(z_r) \rangle ,$$

*donde $i_{1*}$ e $i_{2*}$ son los homomorfismos inducidos por las inclusiones $i_j : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_j$, $j = 1, 2$. En el caso especial en el que $\Pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \{e\}$, $\Pi_1(X) = \langle x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k / r_1, ..., r_m, s_1, ..., s_l \rangle$.*

Aunque los espacios $X_1$ y $X_2$ deben ser abiertos pueden ser escogidos cerrados, pues en general, vamos a encontrar una vecindad abierta de cada uno de los espacios cuyo grupo fundamental sea el mismo y así usar el teorema sin dificultad.

El grupo del nudo se considera como el grupo fundamental del complemento del nudo en $S^3$. Mostremos que puede hacerse el análisis con el complemento en $\mathbb{R}^3$, gracias a la siguiente proposición.

**Proposición 13** *Sea $N$ un nudo en $\mathbb{R}^3$, entonces la inclusión $\mathbb{R}^3 - N \hookrightarrow S^3 - N$ induce un isomorfismo $\psi : \Pi_1(\mathbb{R}^3 - N) \xrightarrow{\sim} \Pi_1(S^3 - N)$.*

**Prueba.** Escojamos una vecindad $U$ de $\infty$ en $S^3$ tal que $\overline{U} \cap N = \Phi$ y es homeomorfa a $\mathbb{R}^3$. Entonces $S^3 - N = (U \cup (S^3 - U)) - N \cong \overline{U} \cup (\mathbb{R}^3 - N)$, siendo $\overline{U}$ y $(\mathbb{R}^3 - N)$ conexos por caminos. Tenemos que $\overline{U}$ es simplemente conexa, es decir, $\Pi_1\left(\overline{U}\right) = \{e\}$. Como $(\mathbb{R}^3 - N) \cap \overline{U}$ es un retracto de $S^1$ entonces $\Pi_1\left((\mathbb{R}^3 - N) \cap \overline{U}\right) \cong \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ y $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N) = \langle y_1, ..., y_n / r_1, ..., r_n \rangle$. Renombrando, $\overline{U} = X_1$, $(\mathbb{R}^3 - N) = X_2$ y dado que $\Pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$, los homomorfismos inducidos son

$$\begin{array}{cccc} i_{1*}: & \Pi_1(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \Pi_1(X_1) \\ & t & \longmapsto & e \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} i_{2*}: & \Pi_1(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \Pi_1(X_2) \\ & t & \longmapsto & e, \end{array}$$

al aplicar Teorema de Van Kampen tenemos que

$$\Pi_1\left(S^3 - N\right) \cong \langle y_1, ..., y_n / r_1, ..., r_n, i_{1*}(t) = i_{2*}(t) \rangle \cong \Pi_1\left(\mathbb{R}^3 - N\right). \quad \square$$

Antes de calcular la presentación para el grupo de un nudo $N$ consideremos una proyección sobre el plano $z = 0$ y supongamos que $N$ está totalmente contenido en $\mathbb{R}^3_+$.

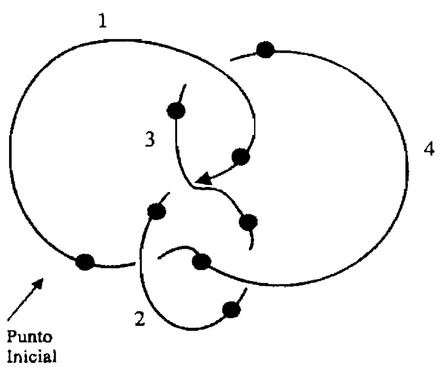



Figura 3-2

Elijamos un punto inicial para recorrer el nudo, situado después de un cruce por debajo. Continuemos nuestro recorrido hasta un punto anterior al próximo cruce por debajo y marquemos tal punto. El segmento de curva comprendido entre los dos puntos es llamado un arco, o sobrepase. Si seguimos recorriendo el nudo trazando puntos de esta forma vamos a tener marcados todos los arcos; numeremos dichos arcos $i = 1, ..., n$ (Fig. 3-2), considerándolos en $\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, z) / z \geq 0\}$. A partir de los extremos de estos sobrepases extendamos líneas perpendiculares a $z = 0$ y unamos los puntos finales de estas líneas de manera que el nudo resultante sea equivalente a $N$ y llamémoslo $\hat{N}$ (Fig. 3-3). Esto nos permitirá encontrar el grupo de $N$ a partir del grupo de $\hat{N}$ puesto que $N$ y $\hat{N}$ son nudos equivalentes.

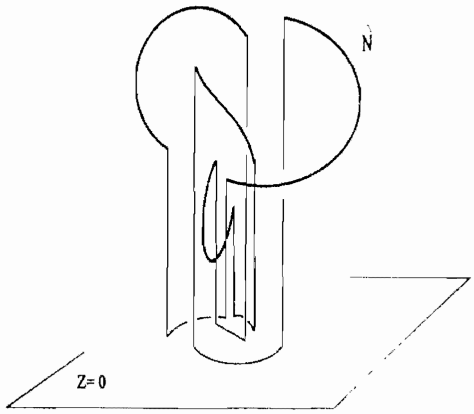



Figura 3-3

Vamos entonces a encontrar una forma de calcular el grupo de un nudo, para ello requeriremos de un lema, el cual probaremos después de las siguientes observaciones: consideremos a $b$ como el punto base de $\mathbb{R}^3_+ - \hat{N}$ y consideremos los lazos que rodean cada uno de los arcos y que dan una vuelta en sentido de un tornillo de mano derecha con relación a la orientación del nudo $\hat{N}$, ; llamémoslos $x_1, x_2, ..., x_n$. Veamos ahora el lema:

**Lema 14** $\Pi_1\left(\mathbb{R}^3_+ - \hat{N}, b\right)$ *es el grupo libre generado por* $x_1, ..., x_n$.

**Prueba.** Para cada arco $i$ construyamos una pared vertical desde $z = 0$ hasta el arco, engrosémosla un poco y llamémosla $B_i$ (Fig. 3-4).

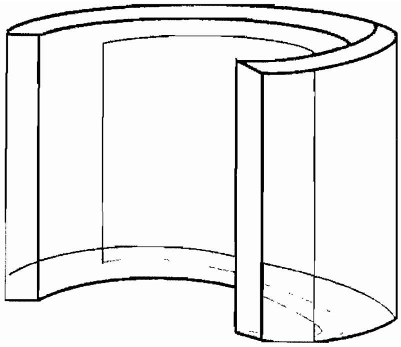


Figura 3-4

Obtenemos así un conjunto $\{B_1, ..., B_n\}$ de espacios que claramente son homeomorfos a bolas disjuntas. Después de ésto quitemos cada $B_i$ y obtenemos así un espacio $X$, el cual es simplemente conexo, pues cualquier lazo basado en $b$ puede ser deformado en el trivial.

Tenemos además que $\mathbb{R}^3_+ - \hat{N} \cong X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right) \cup ... \cup \left(B_n - \hat{N}\right)$. Si deformamos un poco cada $B_i$ podemos verlo como un cilindro, así $B_i - \hat{N}$ es homeomorfo a un cilindro sólido sin su línea central. (Fig. 3-5)

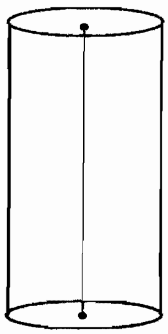


Figura 3-5

Si retraemos este cilindro obtenemos un círculo sin su punto central, el cual tiene como grupo fundamental a $\mathbb{Z}$. Así $\Pi_1\left(B_i - \hat{N}\right) = \langle x_i \rangle \cong \mathbb{Z}$. Además la intersección de $B_i - \hat{N}$ con $X$ es homeomorfa a un disco, luego su grupo fundamental es el trivial.

Tenemos entonces: $\Pi_1(X) = \{e\}$, $\Pi_1\left(B_i - \hat{N}\right) = \langle x_i \rangle \cong \mathbb{Z}$, $\Pi_1\left(X \cap \left(B_i - \hat{N}\right)\right) \cong \{e\}$.

El resultado del lema lo probamos por inducción:

Si $B_i = B_1$, aplicando Teorema de Van Kampen, se tiene que $\Pi_1\left(X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right)\right) = \langle x_1 \rangle$.

Supongamos que dados $i = 1, ..., k$, el grupo fundamental de $X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right) \cup ... \cup \left(B_k - \hat{N}\right)$ es el grupo libre generado por $x_1, ..., x_k$.

Así, para calcular el grupo de $X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right) \cup ... \cup \left(B_k - \hat{N}\right) \cup \left(B_{k+1} - \hat{N}\right)$ estamos en la situación:

$\Pi_1 \left(X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right) \cup ... \cup \left(B_k - \hat{N}\right)\right) = \langle x_1, ..., x_k \rangle$,

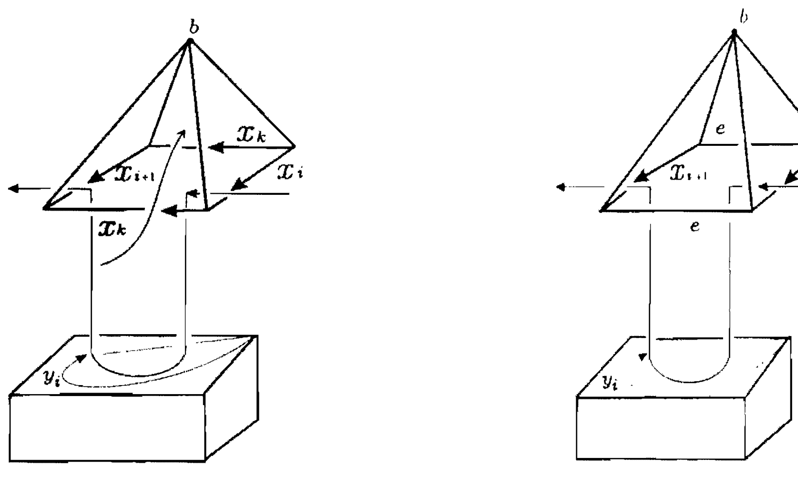
$\Pi_1 \left(B_{k+1} - \hat{N}\right) = \langle x_{k+1} \rangle$

$\Pi_1 \left(\left(X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right) \cup ... \cup \left(B_k - \hat{N}\right)\right) \cap \left(B_{k+1} - \hat{N}\right)\right) = \Pi_1 \left(X \cap \left(B_{k+1} - \hat{N}\right)\right) = \{e\}$.

Luego, por el Terorema de Van Kampen lo único que debemos hacer es agregar el generador $x_{k+1}$, pues no hay ninguna relación. Así, $\Pi_1 \left(X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right) \cup ... \cup \left(B_{k+1} - \hat{N}\right)\right) = \langle x_1, ..., x_k, x_{k+1} \rangle$

Si $b$ no estuviera en $(X \cup \left(B_1 - \hat{N}\right) \cup ... \cup \left(B_k - \hat{N}\right)) \cap \left(B_{k+1} - \hat{N}\right)$ entonces para cada $i$ lo que haríamos sería unir $b$ con algún punto sobre $B_i$ por medio de una línea y agregar ésta a $B_i$. Con ésto y la inducción inmediatamente anterior tenemos el resultado que buscábamos. □

Hasta aquí sólo hemos analizado lo que ocurre en $\mathbb{R}^3_+ - \hat{N}$, nos falta entonces ver lo que sucede en $\mathbb{R}^3_- - \hat{N}$ y en la intersección de $\mathbb{R}^3_+ - \hat{N}$ con $\mathbb{R}^3_- - \hat{N}$.




*a)* *b)*

Figura 3-6

Claramente, $\mathbb{R}^3_- - \hat{N}$ es simplemente conexo.

Ahora, $\left(\mathbb{R}^3_+ - \hat{N}\right) \cap \left(\mathbb{R}^3_- - \hat{N}\right) = \{(x, y, z) / z = 0\} - \hat{N}$, es decir, el plano $z = 0$ con $n$ arcos disjuntos removidos. Por cada uno de estos arcos habrá un lazo $y_i$ (ver Fig. 3-6) que lo rodea; al considerar cada uno de estos lazos en $\mathbb{R}^3_- - \hat{N}$ obtenemos $y_i = e$ y si lo consideramos en $\mathbb{R}^3_+ - \hat{N}$ puede verse en Figura 3-6. $a$) que $y_i = x_i x_k x_{i+1}^{-1} x_k^{-1}$ (si la dirección de $x_k$ se invierte, la relación es $y_i = x_k x_i x_k^{-1} x_{i+1}^{-1}$) o en 3-6. $b$) que $y_i = x_i e x_{i+1}^{-1} e$.

Así se tiene $x_i x_k x_{i+1} x_k^{-1} = e$, $x_i x_k^{-1} x_{i+1} x_k = e$ ó $x_i x_{i+1}^{-1} = e$.

Por el Teorema de Van Kampen: $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N) = \langle x_1, ..., x_n / y_i = e, i = 1, ..., n\rangle$

Si consideramos un lazo $y$ que rodee todos los arcos que se removieron en el plano $z = 0$, podemos ver que $y = y_1 y_2 ... y_n$ y que al inyectarse en $\mathbb{R}^3_- - \hat{N}$ o en $\mathbb{R}^3_+ - \hat{N}$ es homotópico al lazo trivial, luego una de las relaciones puede expresarse en términos de las otras $n-1$ y así se tiene una presentación con $n$ generadores y $n-1$ relaciones. Además podemos eliminar los generadores redundantes que provienen de las relaciones $x_i x_{i+1}^{-1} = e$. Y como $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N) \cong \Pi_1(S^3 - N)$ tenemos el siguiente teorema que describe la presentación de Wirtinger:

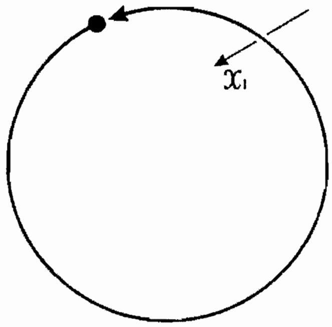
**Teorema 15** *Si $N$ es un nudo entonces* $\Pi_1(S^3 - N) = \langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_{n-1}\rangle$, *donde* $r_i := x_i x_k^{\epsilon} x_{i+1} x_k^{-\epsilon}$, *y* $\epsilon \in \{1, -1\}$.

En 1910, Max Dehn demostró que dado un nudo cualquiera, los generadores y las relaciones obtenidas por este procedimiento dan una descripción completa del grupo de un nudo. No importa cuál sea el nudo siempre es posible calcular su grupo y sus relaciones se pueden interpretar como ecuaciones algebraicas con varias incógnitas.

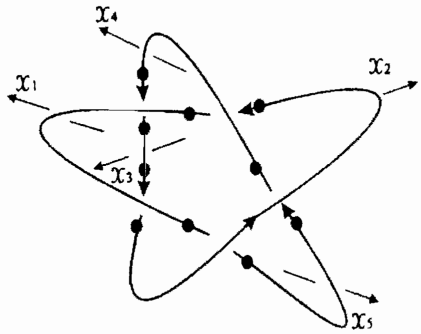
## 3.2 Algunos ejemplos

En esta sección usaremos la presentación de Wirtinger descrita anteriormente para calcular el grupo de algunos nudos. En el Ejemplo 1 calculamos el grupo fundamental para dos diagramas del nudo trivial y comprobamos que, aunque se obtiene el mismo grupo por la invarianza del grupo fundamental, las presentaciones obtenidas pueden ser muy diferentes.

**1. El nudo trivial**




a) $N_1$




b) $N_2$

Es claro que los dos diagramas representan el nudo trivial, calculemos en cada caso su grupo:

Para el diagrama en la parte a) se tiene un solo arco, por lo tanto un solo generador $x_1$. Claramente $\Pi_1(S^3 - N_1) = \langle x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$.

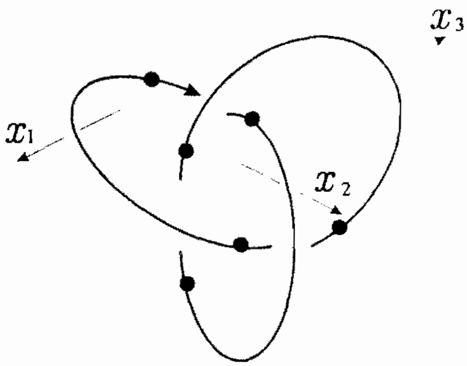
Para el nudo en la parte b) tenemos las siguientes relaciones entre sus generadores:

$$\begin{aligned} r_1 &: x_1 x_2 x_1^{-1} = x_3, \\ r_2 &: x_1 x_4 x_1^{-1} = x_3, \\ r_3 &: x_4 x_2 x_4^{-1} = x_1, \\ r_4 &: x_2 x_5 x_2^{-1} = x_4, \\ r_5 &: x_2 x_5 x_2^{-1} = x_1. \end{aligned}$$

Como se dijo en la prueba de la presentación de Wirtinger, una de las relaciones obtenidas es redundante, luego puede ser eliminada. En este caso eliminemos la primera relación. De las dos últimas relaciones tenemos que $x_4 = x_1$, y con ésto en las otras dos relaciones se tiene que $x_4 = x_2 = x_3$, lo que nos muestra que $\Pi_1(S^3 - N_2) = \langle x_4 \rangle \cong \Pi_1(S^3 - N_1)$.

Aunque en este ejemplo pudimos mostrar que los grupos con presentaciones tan distintas son realmente isomorfos, en general ésto no es tan fácil. Es importante notar que existen diferentes métodos para hallar presentàciones del grupo de un nudo y las presentaciones obtenidas tienen apariencias muy diferentes, por lo que se pone de manifiesto las dificultades que conlleva el problema del isomorfismo, es decir, no se conoce ningún algoritmo que permita determinar si dadas dos presentaciones en términos de generadores y relaciones, ellas corresponden a grupos isomorfos.

**2. El nudo trébol**




Trébol derecho

Trazamos los arcos y leemos la relación correspondiente en cada cruce, de lo cual obtenemos:

$$x_3x_1x_3^{-1} = x_2,$$
$$x_1x_2x_1^{-1} = x_3,$$
$$x_2x_3x_2^{-1} = x_1.$$

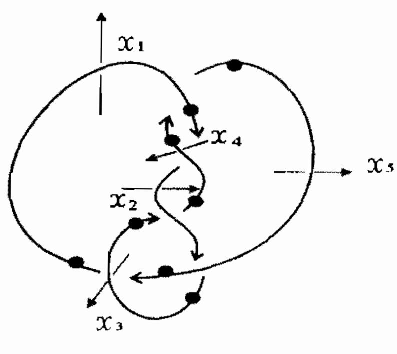
Eliminando la primera relación y remplazando la segunda en la tercera obtenemos

$$x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1} = x_1.$$

Luego, $G = \Pi_1\left(S^3 - N\right) = \langle x_1, x_2 / x_2x_1x_2 = x_1x_2x_1\rangle$.

Si hiciéramos el cálculo con el trébol izquierdo obtendríamos un grupo isomorfo a $G$.

**3. El nudo $5_2$**




$5_2$

Sus relaciones

$$\begin{aligned}
x_1x_5x_1^{-1} &= x_4,\\
x_2x_4x_2^{-1} &= x_3,\\
x_3x_1x_3^{-1} &= x_5,\\
x_4x_2x_4^{-1} &= x_1,\\
x_5x_3x_5^{-1} &= x_2.
\end{aligned}$$

Eliminemos la última ecuación, remplacemos la primera en la segunda y en la cuarta

$$\begin{aligned}
x_2x_1x_5x_1^{-1}x_2^{-1} &= x_3,\\
x_1x_5x_1^{-1}x_2x_1x_5^{-1}x_1^{-1} &= x_1.
\end{aligned}$$

Ahora remplacemos la tercera ecuación original en las dos anteriores

$$\begin{aligned}
x_2x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1} &= x_3,\\
x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1} &= e.
\end{aligned}$$

De la última de estas ecuaciones, despejemos a $x_2$

$$x_2 = x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}.$$

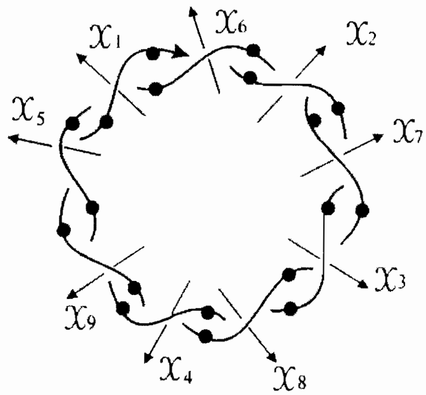
y la remplazamos en la otra ecuación

$$\begin{aligned}
x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}\,\overbrace{x_1\,\underbrace{x_3x_1\underline{x_3^{-1}x_1^{-1}x_1x_3}x_1^{-1}x_3^{-1}}\,x_1^{-1}}\,x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1} &= x_3\\
\Longleftrightarrow x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1} &= x_3.
\end{aligned}$$

De aquí,

$$G = \Pi_1\left(S^3 - 5_2\right) = \left\langle x_1, x_3 / x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1} = x_3x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}\right\rangle.$$

**4. El nudo $9_1$**




$9_1$

Sus relaciones

$$x_1 x_5 x_1^{-1} = x_6,$$
$$x_2 x_6 x_2^{-1} = x_7,$$
$$x_3 x_7 x_3^{-1} = x_8,$$
$$x_4 x_8 x_4^{-1} = x_9,$$
$$x_5 x_9 x_5^{-1} = x_1,$$
$$x_6 x_1 x_6^{-1} = x_2,$$
$$x_7 x_2 x_7^{-1} = x_3,$$
$$x_8 x_3 x_8^{-1} = x_4,$$
$$x_9 x_4 x_9^{-1} = x_5.$$

Haciendo transformaciones algebraicas sobre estas relaciones puede verse que llegamos a la única relación $x_2x_7x_2x_7x_2x_7x_2x_7x_2 = x_7x_2x_7x_2x_7x_2x_7x_2x_7$.

Por tanto $G = \Pi_1\left(S^3 - 9_1\right) = \langle x_2, x_7 / x_2x_7x_2x_7x_2x_7x_2x_7x_2 = x_7x_2x_7x_2x_7x_2x_7x_2x_7\rangle$.

## 3.3 Propiedades del grupo de un nudo

En esta sección estudiaremos algunas propiedades del grupo de un nudo, como la estructura de producto semidirecto, el defecto del grupo de un nudo, el grupo de la suma conexa de dos nudos, garantizar la existencia de nudos no triviales y el lema de la "no-cancelación".

Recordemos inicialmente que un grupo $G$ es producto semidirecto de $K$ por $Q$, denotado $G = K \rtimes Q$ si $G$ contiene subgrupos $K$ y $Q$ tales que:

$(i)$ $K \triangleleft G$.

$(ii)$ $KQ = G$.

$(iii)$ $K \cap Q = \{1\}$.

Para mostrar que un grupo es producto semidirecto de otros dos podemos ayudarnos de la siguiente proposición (para la prueba ver [8, p.137-141]).

**Proposición 16** *Si $K \triangleleft G$ y $Q$ es un subgrupo de $G$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

$(i)$ $G$ es un producto semidirecto de $K$ por $Q$.

$(ii)$ Hay una sucesión exacta corta *escindida* [1] $1 \to K \to G \to Q \to 1$.

$(iii)$ $Q$ es un complemento de $K$.

$(iv)$ $Q$ es un retracto de $G$ con kernel $K$.

Esta proposición nos permite probar el siguiente teorema, que es un resultado fundamental para el estudio del grupo de un nudo.

**Teorema 17** *Sea $G$ el grupo de un nudo $N$, entonces $G = G' \rtimes \mathbb{Z}$, donde $G'$ es el conmutador de $G$.*

**Prueba.** Sea $G$ el grupo de un nudo $N$, y sea $G'$ su conmutador. Sabemos que $G$ tiene una presentación dada por $\langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_{n-1} \rangle$ donde $r_i := x_i x_k^{\epsilon} x_{i+1} x_k^{-\epsilon}$, con $\epsilon \in \{1, -1\}$. Como $G/G'$ es un cociente del grupo $G$, tiene presentación

[1] *Es decir, una sucesión exacta corta* $1 \to K \to G \xrightarrow{\Pi} Q \to 1$ *tal que hay un homomorfismo* $\Psi : Q \to G$ *con* $\Pi\Psi = 1_Q$.

$\langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_{n-1}, x_i x_j = x_j x_i, \forall i, j = 1, ..., n \rangle$ , por lo tanto cada una de las relaciones se convierte en $x_i = x_{i+1}$ y así $G/G' \cong \mathbb{Z}$ .

Sea $t$ el generador de $\mathbb{Z}$, o sea $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ y definamos el homomorfismo para el grupo libre $F = \langle x_1, ..., x_n \rangle$ determinado por

$$\begin{aligned} \Pi : \quad & F \to \mathbb{Z} \\ & x_i \longmapsto t, \qquad \text{para todo } i = 1 \cdots n. \end{aligned}$$

Puesto que $\Pi(x_i x_k^\epsilon x_{i+1} x_k^{-\epsilon}) = t \cdot t^\epsilon \cdot t \cdot t^{-\epsilon} = 1$, para todo $i = 1 \cdots n-1$, entonces $\Pi$ induce un homorfismo de $G$ en $\mathbb{Z}$, que denotamos también por $\Pi$, y además es sobreyectivo. O sea que $G/Ker\ \Pi \cong \mathbb{Z}$, y por tanto $G' \subset Ker\Pi$. Ahora, por teoremas de homomorfismos sabemos que $\frac{G/G'}{Ker\Pi/G'} \cong G/Ker\ \Pi \cong \mathbb{Z}$, luego $\text{Ker}\Pi/G' \cong \{1\}$, es decir, $\text{Ker}\Pi = G'$ y tenemos entonces la sucesión exacta corta

$$1 \to G' \hookrightarrow G \xrightarrow{\Pi} \mathbb{Z} \to 1.$$

Además, si definimos el homomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & \mathbb{Z} \to G \\ & t \longmapsto x_1 \end{aligned}$$

entonces $(\Pi \circ \Psi)(t) = \Pi(\Psi(t)) = \Pi(x_1) = t$ y por tanto la sucesión corta es escindida y $G$ es producto semidirecto de $G'$ por $\mathbb{Z}$. □

Con este teorema podemos encontrar una expresión para el cociente $G/G'$.

**Corolario 18** *Si $G$ es el grupo de un nudo, $G/G' \cong \mathbb{Z}$.*

Este corolario y la presentación de Wirtinger son los elementos que nos van a permitir calcular el defecto del grupo de un nudo. Recordemos el concepto del defecto de un grupo.

**Definición 19** *El* **defecto de una presentación** *es la diferencia entre el número de generadores y el número de relaciones. El* **defecto de un grupo** *es el máximo de los defectos de las presentaciones de un grupo, si tal máximo existe.*

A continuación veremos cuál es el defecto del grupo de un nudo.

**Teorema 20** *El defecto del grupo de un nudo es 1.*

**Prueba.** Ya sabemos que la presentación de Wirtinger para el grupo de un nudo $N$ está dada por: $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N) = \langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_{n-1} \rangle$ donde $r_i := x_i x_k^{\epsilon} x_{i+1} x_k^{-\epsilon}$, con $\epsilon \in \{1, -1\}$, luego la diferencia entre el número de generadores y relaciones para tal presentación es 1. Veamos que no puede darse una presentación en la cual la diferencia entre generadores y relaciones sea mayor que 1.

Supongamos que tenemos una presentación $\langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_m \rangle$ entonces vamos a considerar el grupo cociente $G/G'$, el cual sabemos ya que es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Como $G/G'$ es un cociente del grupo $G$, tiene como presentación $\langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_m, x_i x_j = x_j x_i, \forall i, j = 1, ..., n \rangle$. Enumeremos los generadores de tal forma que las variables libres, si las hay, son las primeras, y como $G/G' \cong \mathbb{Z}$, sólo podría existir una variable libre $x_1$. Si $n = 1$ entonces no existe ninguna relación no trivial.

Supongamos ahora que $n > 1$, dado que $G/G'$ es un grupo abeliano, podemos despejar a $x_n$ de una de las $m$ relaciones como $x_n^{i_n} = x_1^{i_1} ... x_{n-1}^{i_{n-1}}$, y tal que $i_n$ es 1 ó divisor de las potencias de $x_n$ en las otras relaciones. (Debe haber por lo menos una relación en la que se pueda hacer ésto, pues de otra manera tendríamos relaciones de la forma $x_n^{j_n} = x_1^{j_1} ... x_{n-1}^{j_{n-1}}$, que no podrían ser eliminadas de la presentación, haciendo que el grupo no sea libre, lo cual contradice que $G/G' \cong \mathbb{Z}$). Remplacemos a $x_n$ en todas las relaciones que aparezca y así eliminamos una relación y un generador. Supongamos que $m > n - 1$ y repitamos el proceso para $x_{n-1}$, eliminamos entonces otro generador y otra relación, continuemos así hasta obtener una expresión para $x_2$, hasta aquí hemos eliminado $n - 2$ generadores y relaciones. Es claro que las relaciones en las que pueda despejarse $x_2$ son de la forma $x_2 = x_1^k$. Si $x_1$ es libre entonces para asegurar el isomorfismo con $\mathbb{Z}$ debe darse que $k = 0$, si $x_1$ no es libre entonces $k = \pm 1$; así las otras $m - n + 1$ relaciones serían redundantes, por lo tanto en la presentación de $G$ no se requieren más de $n - 1$ relaciones. Si $m < n - 1$ entonces los otros $n - m$ generadores restantes son libres, lo cual no es posible por la descripción de $G/G'$. Luego, el defecto es 1.□

En el Ejemplo 1 vimos que el grupo del nudo trivial es $\mathbb{Z}$. En efecto se tiene también el recíproco, es decir, si el grupo de un nudo es $\mathbb{Z}$ entonces el nudo es el trivial. Este resultado, muy importante en la teoría de nudos, fue asumido inicialmente como intuitivamente claro, pero para una prueba rigurosa se requirió más de medio siglo de trabajo y resultados profundos de la Topología Algebraica y de la teoría de 3-variedades. Nosotros enunciamos dicho resultado, para una prueba ver [1, Prop. 3.17].

**Teorema 21** *Un nudo $N$ es trivial si y sólo si* $\Pi_1(S^3 - N) \cong \mathbb{Z}$.

Con este teorema podemos asegurar la existencia de nudos no triviales, pues cualquier nudo con grupo no trivial está realmente "anudado". Veamos por ejemplo que el trébol es "anudado".

**Corolario 22** *El nudo trébol no es trivial.*

**Prueba.** En el Ejemplo 2 obtuvimos una presentación para el grupo del trébol dada por

$$\Pi_1\left(S^3 - N\right) = \left\langle x_1, x_2 / x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1} = e\right\rangle.$$

Definamos el homomorfismo del grupo libre generado por $\langle x_1, x_2\rangle$ en el grupo de permutaciones $S_3$, dado por:

$$\begin{array}{rcl} \phi : F & \rightarrow & S_3 \\ x_1 & \mapsto & (1\ 2) \\ x_2 & \mapsto & (2\ 3) \end{array}$$

Este homomorfismo es sobre, ya que los ciclos $(1\ 2)$ y $(2\ 3)$ generan al grupo de permutaciones $S_3$, además, haciendo unos cómputos elementales, se puede ver que $x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1} \in \mathrm{Ker}\phi$. Luego, por el Lema 11, $\phi$ se puede extender a un homomorfismo sobre

$$\Psi : \left\langle x_1, x_2 / x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1} = e\right\rangle \ \rightarrow \ S_3$$

Por tanto

$$\Pi_1\left(S^3 - N\right) / Ker\Psi \cong S_3,$$

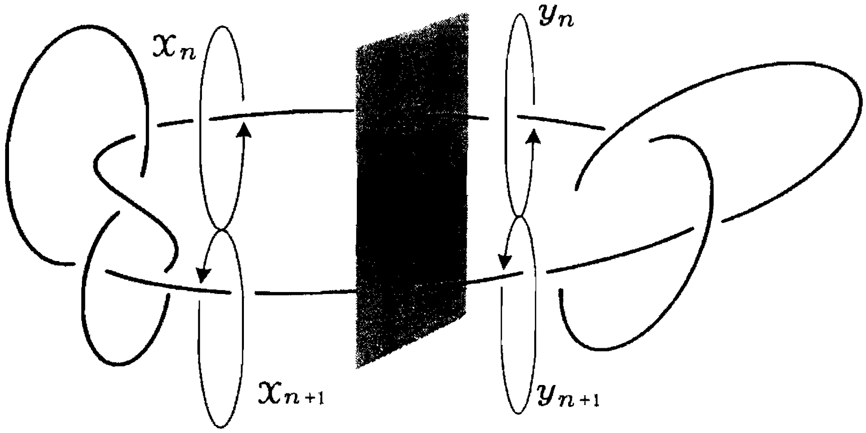
luego, como $S_3$ no es abeliano, entonces $\Pi_1(S^3 - N)$ no puede ser abeliano, es decir, $\Pi_1(S^3 - N) \ncong \mathbb{Z}$, y por tanto el trébol no es un nudo trivial.□

Para los otros ejemplos calculados es posible también definir un homomorfismo de manera conveniente que muestre que $\Pi_1(S^3 - N)$ no puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Veamos ahora cómo se relaciona el grupo de una suma conexa con el grupo de sus componentes.

**Teorema 23** *Si* $\Pi_1(S^3 - N_1) = \langle x_1, ..., x_n / r_1, ..., r_{n-1} \rangle$ *y* $\Pi_1 (S^3 - N_2) = \langle y_1, ..., y_m / s_1, ..., s_{m-1} \rangle$ *entonces*

$$\Pi_1 (S^3 - (N_1 \# N_2)) = \langle x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m / r_1, ..., r_{n-1}, s_1, ..., s_{m-1}, x_n = y_m \rangle .$$




$S^3 - (N_1 \# N_2)$

**Prueba.** Como $N = N_1 \# N_2$ es una suma conexa, existe un plano que lo corta en dos puntos. Tracemos este plano y consideremos las dos regiones de $S^3 - N$ limitadas por él. Llamemos $X_1$ a la región de $S^3 - N$ correspondiente a $N_1$ y $X_2$ a la región de $S^3 - N$ correspondiente a $N_2$. Podemos ver, siguiendo un procedimiento similar al que se realizó para calcular la presentación de Wirtinger, que el grupo fundamental de $X_1$, es el mismo grupo de $S^3 - N_1$, sólo que se agrega el generador $x_{n+1}$ que aparece probablemente en una relación de la forma $r_j : x_j = x_{n+1}^{\epsilon} x_{j+1} x_{n+1}^{-\epsilon}$, con $\epsilon \in \{1, -1\}$, relación en la cual para el grupo de $S^3 - N_1$ aparecía $x_n$. De la figura puede verse que $x_{n+1}$ puede ser deformado de manera continua en $x_n$ implicando que la presentación de $\Pi_1 (S^3 - N_1)$ y $\Pi_1 (X_1)$ es la misma. Algo similar sucede con $X_2$, para la cual se tiene que $\Pi_1 (S^3 - N_2)$ y $\Pi_1 (X_2)$ tienen la misma presentación. La intersección entre $X_1$ y $X_2$, es un plano sin dos puntos, por tanto su grupo fundamental es el grupo libre con dos generadores $t$ y $v$, es decir, $\Pi_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$. Los homomorfismos inducidos son

$$\begin{array}{rccc} i_{1*}: & \Pi_1(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & \Pi_1(X_1) \\ & t & \longmapsto & x_n \\ & v & \longmapsto & x_n \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} i_{2*}: & \Pi_1(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & \Pi_1(X_2) \\ & t & \longmapsto & y_m \\ & v & \longmapsto & y_m \end{array}.$$

Al aplicar el Teorema de Van Kampen se tiene que

$$\Pi_1\left(S^3 - (N_1 \# N_2)\right) = \langle x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m / r_1, ..., r_{n-1}, s_1, ..., s_{m-1}, x_n = y_m \rangle . \square$$

Con ésto y sabiendo que el grupo del trébol es $\left\langle x_1, x_2, x_3 / x_2 x_3 x_2^{-1} = x_1, x_3 x_1 x_3^{-1} = x_2 \right\rangle$ podemos calcular los grupos para los nudos granny y reef.

Es claro que para ambos nudos,

$$G = \left\langle \begin{array}{ll} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 / & x_2 x_3 x_2^{-1} = x_1, x_3 x_1 x_3^{-1} = x_2, \\ & x_5 x_6 x_5^{-1} = x_4, x_6 x_4 x_6^{-1} = x_5, x_3 = x_6 \end{array} \right\rangle$$

lo que se reduce a $G = \langle x, y, z / zxz = xzx, yzyz^{-1}y^{-1} = xzxz^{-1}x^{-1} \rangle$.

Hay una propiedad de los nudos que de manera intuitiva indica que para un nudo no es posible, haciendo otro nudo, lograr desanudarlo, esta propiedad es llamada Teorema de la "no cancelación", y está probada en la siguiente proposición:

**Proposición 24** *Una suma conexa $N_1 \# N_2$ es trivial si y sólo si $N_1$ y $N_2$ son triviales.*

**Prueba.** Supongamos que $N_1 \# N_2$ es trivial y que $N_1$ o $N_2$ son no triviales. Sin pérdida de generalidad supongamos que $N_1$ es trivial y $N_2$ no lo es. Por la propiedad anterior y por ser $N_1$ trivial,

$$\begin{aligned} \Pi_1(S^3 - (N_1 \# N_2)) &= \langle x, y_1, ..., y_m / s_1, ..., s_{m-1}, x = y_m \rangle \\ &= \langle y_1, ..., y_m / s_1, ..., s_{m-1} \rangle \\ &= \Pi_1(S^3 - N_2). \end{aligned}$$

Luego $\Pi_1(S^3 - N_2) \ncong \mathbb{Z}$. Absurdo!.

Si tanto $N_1$ como $N_2$ son no triviales entonces

$$\Pi_1\left(S^3-(N_1\#N_2)\right)=\langle x_1,...,x_n,y_1,...,y_m/r_1,...,r_{n-1},s_1,...,s_{m-1},x_n=y_m\rangle$$

con $n>1$ y $m>1$, luego $\Pi_1\left(S^3-(N_1\#N_2)\right)\ncong\mathbb{Z}$. Absurdo!. Luego, $N_1$ y $N_2$ son nudos triviales.

Si $N_1$ y $N_2$ son triviales entonces $\Pi_1\left(S^3-N_1\right)=\langle t\rangle$ y $\Pi_1\left(S^3-N_2\right)=\langle w\rangle$ por lo tanto $\Pi_1\left(S^3-(N_1\#N_2)\right)=\langle t,w/t=w\rangle=\langle t\rangle\cong\mathbb{Z}$ y así $N_1\#N_2$ es trivial. $\square$

# Conclusiones

El grupo de un nudo es un invariante bueno para la clasificación de los nudos, superior a otros invariantes y de fácil cálculo. Es además elemento importante en el estudio de algunas propiedades dentro de la teoría. Sin embargo, las herramientas necesarias para probar muchos de los resultados conocidos sobre la teoría de nudos, relacionados con este invariante, no se encuentran al alcance del presente trabajo, herramientas como la teoría de grupos de homología y cohomología, la teoría de cubiertas, etc.

El grupo de un nudo además, no logra clasificar totalmente todos los nudos pues aunque si dos nudos tienen grupos distintos se puede determinar la no equivalencia de ellos, sólo para nudos primos puede concluirse que son homeomorfos al saber que sus grupos son isomorfos; lo que ha hecho necesario buscar otros invariantes para una clasificación más completa. Estos invariantes son los polinomios y junto con las teorías antes enunciadas crean un interés más para continuar estudiando la teoría de nudos.

# Bibliografía


[1] Burde, G.; Zieschang, H. *Knots.* Walter de Gruyter, New York, 1985.

[2] Crowell, R.; Fox, R. *Introduction to knot theory.* Springer, New York, 1963.

[3] Fox, R.H. *A quick trip through knot theory,* Topology of 3-Manifolds and related topics. Prentice-Hall, 1962, 120-167.

[4] Fraleigh, J. *Algebra abstracta.* Adisson-Wesley, Massachusetts, 1987.

[5] Gómez, P. *Polinomios invariantes de nudos y enlaces.* Tesis de Magister. Universidad Nacional, Medellín, 1995.

[6] Magnus, W.; Karras, A.; Solitar, D. *Combinatorial group theory.* Dover publications,New York, 1976.

[7] Munkres, J.R. *Topology, A first course.* Prentice-Hall, 1975.

[8] Rotman, J. *An introduction to the theory of groups.* Allyn and Bacon, Massachusetts, 1973.

[9] Thistlethwaite, M. *Knot tabulations and related topics.* Aspects of topology in memory of Hugh Dowker 1912-1982. (James, eds.), London Math Soc. Lecture Note Ser., vol.93.

[10] Trotter, H.F. *Noninvertible knots exist,* Topology 2 (1964), 275-280.

[11] Waldhausen, F. *The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds,* Ann. of Math. (2) **88**, (1988), 272-280.